

Mr Dževad Zečić

OPIS RUKOPISA MATEMATSKOG DJELA »HULĀSA AL-HISĀB«

Islamska srednjovjekovna znanost je velikim dijelom bila nastavak postojeće grčke tradicije, koja je bila već na izmaku.

Tada je mnoštvo sačuvane grčke kulturne baštine prešlo u islamski svijet. Prevodi su uključivali radove iz mnogih znanosti, među kojima se posebna pažnja obraćala fizici, mineralogiji, botanici, astronomiji, geografiji i matematici. Doprinos Arapa svjetskoj kulturi je bio ogroman jer su staru grčku kulturu proširili i produbili i s njom upoznali Evropu.

Islamski srednjovjekovni učenjaci su umnogome doprinijeli sveukupnom razvoju matematike asimilirajući različite utjecaje kao što su bili grčki, indijski i persijski.

Odnosi s Indijom donijeli su velike rezultate u matematici, jer poziciono pisanje brojeva na bazi decimalnog sustava i upotreba nule omogućili su znatan napredak matematskih tehnika.

Arapska geometrija je bila strogo deduktivan sustav, kakav je dao Euklid, ali se u njemu nalaze i tragovi geometrijske analize. Također su u algebri preuzeli od Grka strog geometrijski dokaz, ali i Diofantovo izbjegavanje negativnih brojeva, što je bilo protivno indijskom shvaćanju.

U predočavanju jednadžbi Arapi napuštaju sinkopatski oblik i vraćaju se na retorički.

Mnogi učenjaci su pisali o matematici i astronomiji, a najpoznatiji je bio Muhammad ibn Musa al-Havarizmi (IX stoljeće) koji je napisao djelo *Kitāb al-džabr wa al-muqābala* (Knjiga o uspostavljanju i suprotstavljanju) i ono je znatno utjecalo na razvoj arapske matematike, odnosno algebre koja je po riječi *al-džabr* i dobila ime. Po iskrivljenom obliku njegovog imena nazvan je algoritam.

Mnogobrojni rukopisi na arapskom, iz područja različitih znanosti, smješteni su u raznim svjetskim bibliotekama i muzejima. U Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu među arapskim rukopisima se nalaze djela iz gotovo svih oblasti islamskih znanosti, a posebno iz arapske filologije, dogmatike, medicine, astronomije, matematike i drugih znanosti.

Od matematskih rukopisa izdvojio bih dva. Prvi je pod naslovom *Muhtasar fi (ilm) al-hisab*, I dio, čiji je autor Abul-Mahāsīn Hasan

b. Abū Tālib al-Bayhaqī al-Ḥorāsānī, a prepisao ga je Imad ibn Muḥammad 18. maja 1340. godine, i zapadni izvori ga ne poznaju. To je jedinstven primjerak u svijetu, što mu daje još veći značaj. Djelo sadrži matematske osnove, računske operacije i indijske brojeve. Ima 136 strana. Drugi dio toga djela je o astronomiji.

Drugi rukopis je pod naslovom *Hulāsa al-ḥisāb* (Suština matematike) čiji je autor Bahādin Muḥammad ibn Husayn al-ʿĀmilī.

Rođen je 9. 2. 1547. u Balbaku i preselio je sa svojim ocem u Iran. Po završetku svog studija putovao je oko 30 godina i konačno se skrasio u Isfahanu gdje je na dvoru šaha Abaza I uživao veliki ugled kao šayh al-islam. Tamo je i umro 31. 8. 1621.¹ Bio je poznati matematičar, astronom i filozof. Ostavio je iza sebe mnogobrojna djela iz različitih oblasti kao što su književnost, teologija, arapski jezik, islamski misticizam, astronomija i matematika.

Prepisi njegovog najpoznatijeg matematskog djela *Hulāsa al-ḥisāb* su smješteni po mnogobrojnim bibliotekama i muzejima.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci su prepisi:

1) pod signaturom R-487 je rukopis čiji je prepisivač nepoznat, a završen je 1678. godine;

2) pod signaturom R-2551 je rukopis čiji prepisivač i godina prepisa su nepoznati;

3) rukopis R-1418 je 1664. godine završio hadži Osman ibn hadži Omer;

4) rukopis R-1660/4 je završen 1723. godine i prepisivač je nepoznat;

5) pod signaturom R-1478/2 je komentar na djelo *Hulāsa al-ḥisāb* i djelo je prepisano u Edirni (Turska) 1767. godine;

6) pod signaturom 0-3494 je štampano djelo, takođe na arapskom, i štampano je u Istanbulu 1851. godine.

Ovo djelo je traktat više enciklopedijskog karaktera i postiglo je veću popularnost od XVII do XIX stoljeća o čemu svjedoče mnogobrojni rukopisi ovoga djela i prevodi na evropske jezike, i to: 1843. godine na njemački i 1846. godine na francuski jezik.

Opis rukopisa R-487

Dimenzija je 25 x 18 cm i ima devet listova (16 strana), od kojih je posljednji list dodat djelu *Hulāsa al-ḥisāb* i odnosi se na dva primjera iz nasljednog prava, što bi mogao biti rad prepisivača. Taj dodatak je sa potpisom izvjesnog Ramadana i on bi mogao biti prepisivač. Prepis je završen 24. 2. 1088 (19. 1. 1678).

Sastoji se od uvoda, deset glava i pogovora, gdje se uglavnom naznačava sva matematska problematika kojom se bavilo do tog vremena.

U uvodu je dato određenje broja, oblik broja i mjesto broja. Autor navodi da je »matematika znanost pomoću koje se čovjek

¹ Carl Brockelmann, Geschichte der Arabischen Litteratur, von C. Brockelmann, Leiden E.J. Brill 1949. (1938), str. 546.

informiše kako da izvede iz brojnih nepoznanica brojne podatke, čiji je predmet broj.«²

Naglašava se da su od Indijaca preuzete oznake za devet cifara: ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ i pozicioni način pisanja.

Taj način pisanja brojeva na bazi decimalnog sustava i upotreba nule omogućili su znatan napredak matematskih tehnika. U Evropu su poziciono pisanje brojeva prenijeli Arapi.

Prva glava je o aritmetici cijelih brojeva i podijeljena je na šest poglavlja: a) o oduzimanju, b) o sabiranju, c) o polovljenju i udvajanju, d) o množenju, e) o dijeljenju i f) o vađenju kvadratnog korijena.

Uputstva za sve operacije su detaljno objašnjena uz numeričke primjere i načini operisanja se mnogo ne razlikuju od današnjeg. Radnje polovljenja (*tansif*) i udvajanja (*tafriq*) su bile važne i srećemo ih u arapskoj literaturi već kod Al-Havarizmija, a sačuvalo se po tradiciji sve do Al-Āmilija.

Obje operacije su djelimični slučajevi dijeljenja i množenja, ali su se vjerovatno zadržale da bi se olakšalo pamćenje pravila vađenja kvadratnog korijena i rješavanje kvadratnih jednačbi. Uz sve ove operacije nalazimo načine provjere ovih radnji pomoću mizana (vage), odnosno kako navodi Al-Āmili: »Zapamti da je mizan onaj broj koji je ostao nakon odbijanja (9—9) ...«³

Provjera je osnovana na osnovu ostatka od dijeljenja svakog cijelog broja na 9 odnosno na osnovu dijeljenja zbira cifara na 9, i provjera se sreće kako u arapskim priručnicima tako i u indijskim.

Druga glava je o aritmetici razlomaka i sastoji se od tri uvoda i šest poglavlja.

Prvi uvod je o opštim djeliteljima, drugi je o nazivnicima i treći je o pretvaranju mješovitih razlomaka u nepravu i obratno. Prvo poglavlje je o sabiranju i udvajanju razlomaka, drugo je o o polovljenju i oduzimanju, treće je o množenju, četvrto o dijeljenju, peto je o vađenju kvadratnog korijena i šesto je o pretvaranju razlomaka u drugi razlomak.

Muslimanski srednjovjekovni matematičari, slijedeći Indijce, zapisivali su razlomke u obliku koji je blizak savremenom; brojnik su stavljali nad nazivnikom. U slučaju mješovitog broja cijeli dio su pisali nad brojnikom. Crta između brojnika i nazivnika slučajno se sreće oko 1200. godine kod zapadnoarapskog matematičara Muhammada al-Hasara i 1202. godine kod Italijana Leonarda Pizanskog. Način pisanja razlomaka i njihovo izražavanje se zadržalo i do vremena u kojem je živio Al-Āmili. Razlomačka crta se nije pisala i kod mješovitih brojeva pisali su cijeli dio nad brojnikom.

Treća glava je o određivanju nepoznate »pomoću proporcija«. Način računanja nepoznate je »ako je jedna od strana nepoznata, podijelit ćeš ravan dviju srednjih na poznate strane ili od dviju

² Hulusa al-hisab, B.M.b.H. al-Amili; (R-487), Uvod.

³ Ibid., I glava, I poglavlje.

⁴ Ibid., III glava.

srednjih podijelit ćeš ravan dviju strana na poznatu srednju.«⁴ Suvremenom simbolikom ove dvije proporcije možemo napisati na slijedeći način:

$$x:a=b:c, \text{ nepoznata je } x = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$a:x=b:c, \text{ nepoznata je } x = \frac{a \cdot c}{b}$$

Četvrta glava je o određivanju nepoznatih pomoću dvije greške, što čini algoritam automatskog rješenja bilo kojeg zadatka koji se izražava linearnom jednadžbom sa jednom nepoznatom. Za njegovu primjenu nije potrebno ni analizirati zadatak, niti zapisivati ga u vidu jednadžbe, niti ga dovoditi u bilo koji kanonski oblik.

U petoj glavi Al-Amili daje još jedan postupak rješavanja linearnih jednadžbi pod nazivom »o izvlačenju nepoznanice obratno«. Postupak se sastoji u obrnutom postupku od onoga kako je problem postavljen.

Šesta glava je o geometriji i sastoji se od uvoda i tri poglavlja. Definiše se geometrija kao »... znanost koja nas obavještava o kvantitetu vezano za čvrsto«,⁵ zatim se definiše prava, ravan i tijelo te načini računanja njihovih površina i volumena.

Alko se u uputama za računanje površina, obujma i volumena uvrste današnji simboli, dobijaju se formule identične današnjim. Za broj π uzima se približna vrijednost 7²² ili 3,1.

U sedmoj glavi je primjena geometrije u praktičnim primjerima: nivelisanje tla, mjerenje dubine bunara, spoznaja pojedinih uzvisina, određivanje širine rijeka i upotreba astrolaba u iste svrhe. Iz primjera »... postavi na zemlju ogledalo tako da vidiš vrh brda na tom ogledalu, pomnoži ono što se nalazi između ogledala i osnove sa svojim stavom i podijeli rezultat na ono što pretpostavlja razliku između ogledala i tvog položaja i taj rezultat je visina...«⁶ se lahko može zaključiti da se ovdje koristi osobina sličnosti pravokutnih trokuta.

U ostalim primjerima slično su korištene iste osobine. U istu svrhu je objašnjena upotreba astrolaba, a posebno za mjerenje dubine bunara i širine rijeka. Astrolab su pronašli Arapi na temelju Ptolomejevih teoretskih radova, a služio je, u prvom redu, kao astronomsko računalo.

Za detaljna objašnjenja i dokaze ovih mjerenja Al-Amili upućuje na knjigu *Džabr al-hisāb* (Velika knjiga), a posebno na svoje komentare na persijskom o astrolabu gdje su navedeni postupci na koje do tada niko nije ukazao (*Talikāt ila asturlab — Zabilješke o astrolabu*).

Osma glava se sastoji od dva poglavlja. Prvo poglavlje je o algebarskim stepenima i operacijama njima, a druga je o rješavanju kvadratnih jednadžbi i primjena metoda *al-džabr* i *al-muqabale*. Još je Abu Kamil uveo viši stepen nepoznate. Viši stepeni nepoznate

⁵ Ibid., VI glava.

⁶ Ibid., VII glava, II poglavlje.

su se izražavali preko *šay* (mešto) *mal* (sredstvo) i *kab* (kub). Al-Amili uvodi bilo kojeg reda stepene i kada bi *šay'* označili današnjom simbolikom sa x , onda bismo sa x^2 mogli označiti *mal*, a sa x^3 *kab*. Onda je x^4 kao *mal al mal*, x^5 kao *mal al kab* itd. Tabelom je ilustriran način operisanja sa stepenima i simobilčki zapisano svodi se na pravila:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$x^n : x^m = x^{n-m}$$

Takođe se daju načini množenja polinoma kao što je ovaj primjer: »Množenje 5 adeda bez šaya sa 7 adeda bez šaya je 35 adeda i 1 *mal* bez 12 šaya.«⁷

Simbolički bi bilo: $(5-x) \cdot (7-x) = 35 + x^2 - 12x$.

Drugo poglavlje je posvećeno kvadratnim jednačbama, njihovom dovođenju na kanonski oblik, primjena osnovnih operacija *al-džabr* i *al-maqabale* i načini rješavanja različitih tipova kvadratnih jednačbi.

Nepoznata se naziva »šay« (mešto) kvadrat nepoznat je »mal« (sredstvo), a slobodni član »adea« (broj) ili »*dirhem*« (naziv srebrnog novca). Pošto se nije operisalo negativnim brojevima, postojalo je više tipova kvadratnih jednačbi.

Kod Al-Amilija srećemo šest slijedećih tipova:

- 1) $ax=b$ (šayi odgovaraju adedima — nepoznata odgovara broju)
- 2) $ax^2=bx$ (malovi odgovaraju šayima-kvadrati odgovaraju nepoznatostoj)
- 3) $ax^2=c$ (malovi odgovaraju adedima-kvadrati odgovaraju brojevima)
- 4) $ax^2+bx=c$ (malovi i šayi odgovaraju adedima — kvadrati i nepoznate odgovaraju brojevima)
- 5) $ax^2+c=bx$ (malovi i adedi odgovaraju šayima — kvadrati i brojevi odgovaraju nepoznatostoj)
- 6) $ax^2=bx+c$ (malovi odgovaraju šayima i adedima — kvadrati odgovaraju nepoznatim i broju).

Jednačine se dovode u kanonske forme uz pomoć dvije osnovne operacije: *al-džabr* i *al-muqabala*.

Al-džabr (dopunjavanje) je prenos umanjjenih članova jednačbe na drugu stranu u obliku dodatog člana, *al-muqabala* (izravnanje) je skraćivanje jednakih članova kod oba dijela jednačbe.

Deveta glava je »o korisnim pravilima«, gdje je dato dvanaest pravila i odnose se na određivanje suma prirodnih brojeva, parnih i neparnih, njihovih kvadrata, neke osobine brojeva i njihovih kvadratnih korijena i određivanje savešenih brojeva po Euklidu.

Deseta glava sadrži različite zadatke koji su riješeni pomoću više metoda i to: proporcije, udvojeni lažni položaj, obrnuti postupak itd.

U pogovoru su sedam »neispunjenih zadataka« koji su u većini slučajeva s iracionalnim rješenjima.

U četvrtom neispunjenom zadatku treba »podijeliti kubni broj na dva kubna dijela«, što je dijelimični slučaj velike teoreme Fermata ($x^n + y^n = z^n$, kada je $n = 3$).

⁷ Ibid., VIII glava, I poglavlje.

Uopće, može se zaključiti da je matematika u vremenu kada je nastalo djelo *Hulāsa al-hisāb* dostigla takav stupanj kada su se pojedinim pravilima iz geometrije, aritmetike i algebre dala neodređenost i koja su se mogla shvatiti općenito. Ta pravila su se konkretizirala za pojedine numeričke primjere.

Nije se učinio samo još jedan korak, kada je trebalo zamijeniti neodređene objekte odgovarajućim simbolima, pa da matematika krene jednim drugim tokom, gdje bi se opća simbolička algebra mogla primijeniti i na brojeve i na geometrijske objekte.

Matematsko djelo ovog tipa je prvi put napisano i autor u pogovoru ističe: »Znaj, dragi prijatelju, koji težiš za rijetkim vrijednostima, ja sam ti naveo u ovom traktatu ono što je suštinsko, one najbitnije vrijednosti matematskih znanosti, zakona koji nisu do sada sabrani niti u jednom traktatu, niti matematskom djelu.« Otuda i popularnost djela *Hulāsa al-hisāb* i ono je u periodu od XVIII do XIX stoljeća najviše korišteno za matematsko obrazovanje, odnosno služilo je kao udžbenik.

Mnoštvo prepisa ovog djela smješteno je po svjetskim bibliotekama i muzejima, što govori u prilog činjenici da je najviše korišteno matematsko djelo.

Takođe u Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu je najviše rukopisa ovog matematskog djela, te je ono najviše korišteno u Bosni i Hercegovini za vrijeme turske vladavine i po njemu se može suditi o matematskom obrazovanju. Također, ono daje solidan uvid u povijest arapske matematike.

SUMMARY

DESCRIPTION OF THE MANUSCRIPT ON MATHEMATICS ENTITLED »HULĀSA AL-HISĀB«

The work on mathematics entitled »Hulasa al-hisab« (Substance of mathematics) was written by Bahaadin Muhammad b. Husayn al-Amili who was born in Balbaka on February 9, 1547, and later lived in Iran. At the court of Shah Abaz I at Isfahan he enjoyed a great reputation as a Sheikh of Islam. There he died on August 31, 1621.

The work consists of an introduction, ten chapters and an epilogue which designates all the mathematical problems which he had treated until that time.

There are many translations of this work, some of which are housed in the Gazi Husrevbeg Library.

The work is mostly of an encyclopaedic character. It was popular from the XVIIth to the XIXth century, as numerous translations testify.